第4講　三角比といえば…

4　円に内接する四角形 ABCD が AB＝3，BC＝2，CD＝1，DA＝4 を満たしている．また，直線 AB と直線 CD の交点を E，直線 AD と直線 BC の交点を F，線分 AC と線分 BD の交点を P とし，三角形 BCE の外接円と直線 EF の交点で E 以外のものを点 Q とする．次の各問いに答えよ．

(1)　点 Q は三角形 CDF の外接円上にあることを示せ．

(2)　線分 BD，線分 BE，線分 DF，線分 EF の長さをそれぞれ求めよ．

(3)　四角形 ABCD の面積 S を求めよ．

(4)　線分 AP の長さを求めよ．

(5)　sin∠APB の値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第４講　三角比といえば…

4　AB＝15，AC＝8 である △ABC の内心を P，∠C の 2 等分線と辺 AB の交点を D，∠B の 2 等分線と辺 AC の交点を E，直線 DE が辺 BC の延長線と交わる点を F とする．4 点 A，D，P，E が同一円周上にあるとき，以下の □ にあてはまる適切な数をそれぞれ答えよ．

(1)　$\angle A=\dfrac{1}{\square}(\angle B+\angle C)$ であるから，$\angle A=\square^\circ$ である．

(2)　線分 BC の長さは □ である．

(3)　線分 CF の長さは $\dfrac{\square}{\square}$ である．

(4)　線分 AE の長さは $\dfrac{\square}{\square}$ であり，線分 BP の長さは $\dfrac{\square\sqrt{\square}}{\square}$ である．

【選択肢】

(1)　㋐　$\angle A=\dfrac{1}{3}(\angle B+\angle C)$，$\angle A=45^\circ$　　㋑　$\angle A=\dfrac{1}{2}(\angle B+\angle C)$，$\angle A=60^\circ$

㋒　$\angle A=\dfrac{1}{5}(\angle B+\angle C)$，$\angle A=30^\circ$

(2)　㋐　BC＝12　　㋑　BC＝14　　㋒　BC＝13

(3)　㋐　$CF=\dfrac{104}{7}$　　㋑　$CF=\dfrac{99}{7}$　　㋒　$CF=\dfrac{114}{7}$

(4)　㋐　$AE=\dfrac{36}{7}$，$BP=\dfrac{5\sqrt{26}}{3}$　　㋑　$AE=\dfrac{25}{7}$，$BP=\dfrac{5\sqrt{13}}{3}$

㋒　$AE=\dfrac{30}{7}$，$BP=\dfrac{5\sqrt{39}}{3}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第４講　三角比といえば…

4 円に内接する四角形 ABCD が AB＝3，BC＝2，CD＝1，DA＝4 を満たしている．また，直線 AB と直線 CD の交点を E，直線 AD と直線 BC の交点を F，線分 AC と線分 BD の交点を P とし，三角形 BCE の外接円と直線 EF の交点で E 以外のものを点 Q とする．次の各問いに答えよ．

(1) 点 Q は三角形 CDF の外接円上にあることを示せ．
(2) 線分 BD，線分 BE，線分 DF，線分 EF の長さをそれぞれ求めよ．
(3) 四角形 ABCD の面積 S を求めよ．
(4) 線分 AP の長さを求めよ．
(5) sin∠APB の値を求めよ．

【答】 (1) 略　(2) $BD=\sqrt{\frac{55}{7}}$，$BE=\frac{5}{3}$，$DF=\frac{5}{4}$，$EF=\frac{\sqrt{2065}}{12}$　(3) $2\sqrt{6}$

(4) $\frac{6\sqrt{385}}{35}$　(5) $\frac{4\sqrt{6}}{11}$

【解答】

(1) B，C，Q，E は同一円周上より，∠CQE＝∠ABC

また，A，B，C，D は同一円周上より，∠ABC＝∠CDF

よって ∠CQE＝∠CDF より，Q，C，D，F は同一円周上にある．

(2) A，B，C，D は同一円周上より　$\angle BAD+\angle BCD=\pi$　よって

$$\cos\angle BAD+\cos\angle BCD=0$$

$$\frac{3^2+4^2-BD^2}{2\times3\times4}+\frac{2^2+1^2-BD^2}{2\times2\times1}=0$$

$$BD^2=\frac{55}{7}\qquad \therefore\quad \mathbf{BD}=\sqrt{\frac{55}{7}}$$

方べきの定理より，$BE(BE+3)=EC(EC+1)$　……①

△EBC と △EDA が相似であることより，$EC:(BE+3)=2:4$　　$BE+3=2EC$

これを①に代入，整理することで $\mathbf{BE}=\frac{5}{3}$ を得る．また，$EC=\frac{7}{3}$ である．

メネラウスの定理より

$$\frac{DF}{AF}\times\frac{EC}{CD}\times\frac{AB}{BE}=1\qquad \frac{DF}{DF+4}\times\frac{\frac{7}{3}}{1}\times\frac{3}{\frac{5}{3}}=1\qquad \therefore\quad \mathbf{DF}=\frac{5}{4}$$

$AE=3+\frac{5}{3}=\frac{14}{3}$，$AF=4+\frac{5}{4}=\frac{21}{4}$，$\cos\angle BAD=\frac{3^2+4^2-BD^2}{2\times3\times4}=\frac{5}{7}$　より

$$EF^2=AE^2+AF^2-2\times AE\times AF\times\cos\angle BAD$$

$$=\left(\frac{14}{3}\right)^2+\left(\frac{21}{4}\right)^2-2\times\frac{14}{3}\times\frac{21}{4}\times\frac{5}{7}=\frac{2065}{144}$$

$$\therefore\quad \mathbf{EF}=\frac{\sqrt{2065}}{12}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(3)　$\sin\angle \mathrm{BAD}=\sqrt{1-\left(\frac{5}{7}\right)^2}=\frac{2\sqrt{6}}{7}$　より

$$S=\frac{1}{2}\times \mathrm{AB}\times \mathrm{AD}\times \sin\angle \mathrm{BAD}+\frac{1}{2}\times \mathrm{BC}\times \mathrm{CD}\times \sin\angle \mathrm{BCD}$$

$$=\frac{1}{2}(3\times 4+2\times 1)\times \frac{2\sqrt{6}}{7}=\mathbf{2\sqrt{6}}$$

(4)　トレミーの定理より

$$\mathrm{AC}\times \mathrm{BD}=\mathrm{AB}\times \mathrm{CD}+\mathrm{BC}\times \mathrm{AD}$$

$$\mathrm{AC}\times\sqrt{\frac{55}{7}}=3\times 1+2\times 4 \qquad \therefore\quad \mathrm{AC}=\sqrt{\frac{77}{5}}$$

また，AP：PC＝(AB×AD)：(BC×CD)＝6：1 より　$\mathrm{AP}=\frac{6}{7}\times \mathrm{AC}=\mathbf{\frac{6\sqrt{385}}{35}}$

(5)　$S=\frac{1}{2}\times \mathrm{AC}\times \mathrm{BD}\times \sin\angle \mathrm{APB}$　より

$2\sqrt{6}=\frac{1}{2}\times 11\times \sin\angle \mathrm{APB}$

$$\therefore\quad \sin\angle \mathrm{APB}=\mathbf{\frac{4\sqrt{6}}{11}}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第4講　三角比といえば…

4　AB＝15，AC＝8 である △ABC の内心を P，∠C の 2 等分線と辺 AB の交点を D，∠B の 2 等分線と辺 AC の交点を E，直線 DE が辺 BC の延長線と交わる点を F とする．4 点 A，D，P，E が同一円周上にあるとき，以下の □ にあてはまる適切な数をそれぞれ答えよ．

(1)　$\angle A=\dfrac{1}{\square}(\angle B+\angle C)$ であるから，$\angle A=\square^\circ$ である．

(2)　線分 BC の長さは □ である．

(3)　線分 CF の長さは $\dfrac{\square}{\square}$ である．

(4)　線分 AE の長さは $\dfrac{\square}{\square}$ であり，線分 BP の長さは $\dfrac{\square\sqrt{\square}}{\square}$ である．

【選択肢】

(1)　㋐　$\angle A=\dfrac{1}{3}(\angle B+\angle C)$，$\angle A=45^\circ$　　㋑　$\angle A=\dfrac{1}{2}(\angle B+\angle C)$，$\angle A=60^\circ$

㋒　$\angle A=\dfrac{1}{5}(\angle B+\angle C)$，$\angle A=30^\circ$

(2)　㋐　BC＝12　　㋑　BC＝14　　㋒　BC＝13

(3)　㋐　$CF=\dfrac{104}{7}$　　㋑　$CF=\dfrac{99}{7}$　　㋒　$CF=\dfrac{114}{7}$

(4)　㋐　$AE=\dfrac{36}{7}$，$BP=\dfrac{5\sqrt{26}}{3}$　　㋑　$AE=\dfrac{25}{7}$，$BP=\dfrac{5\sqrt{13}}{3}$

㋒　$AE=\dfrac{30}{7}$，$BP=\dfrac{5\sqrt{39}}{3}$

【答】　(1) ㋑　(2) ㋒　(3) ㋐　(4) ㋒

【解答】

(1)　四角形 ADPE は円に内接しているので，∠EPC＝∠A

また，△PBC において 1 つの外角はそれと隣り合わない内角の和に等しいので

$$\angle A=\frac{1}{2}\angle B+\frac{1}{2}\angle C=\frac{1}{\mathbf{2}}(\angle B+\angle C)$$

ここで ∠A＋∠B＋∠C＝180° より，3∠A＝180°

$$\therefore\quad \angle A=\mathbf{60}^\circ$$

(2)　△ABC において，余弦定理より

$$BC^2=15^2+8^2-2\cdot15\cdot8\cdot\cos60^\circ=169$$

$$\therefore\quad BC=\mathbf{13}$$

ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(3)　メネラウスの定理より

$$\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{BF}}\cdot\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{CE}}\cdot\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{AD}}=1 \quad \text{よって} \quad \frac{\mathrm{CF}}{13+\mathrm{CF}}\cdot\frac{15}{13}\cdot\frac{13}{8}=1$$

$$\left(\frac{13}{\mathrm{CF}}+1\right)\cdot\frac{8}{15}=1$$

$$\therefore \quad \mathrm{CF}=\boldsymbol{\frac{104}{7}}$$

(4)　$\mathrm{AE}=8\times\dfrac{15}{15+13}=\boldsymbol{\dfrac{30}{7}}$

$$\mathrm{BE}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{AE}^2-2\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AE}\cdot\cos 60^\circ$$

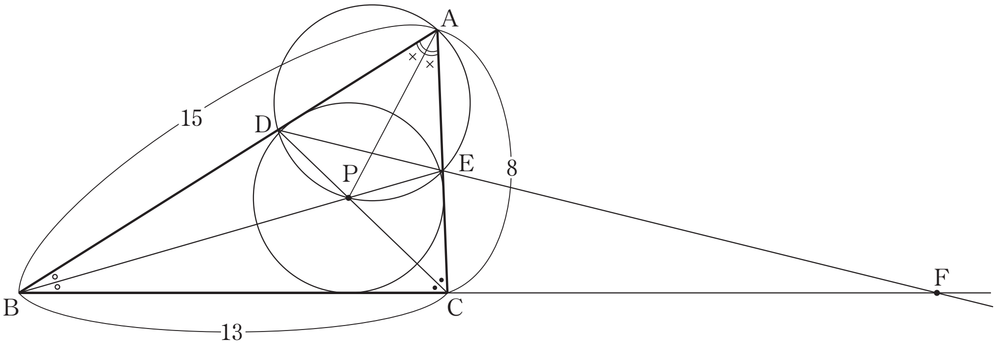
$$=15^2+\frac{30^2}{7^2}-2\cdot15\cdot\frac{30}{7}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{15^2\cdot39}{7^2}$$

$$\therefore \quad \mathrm{BE}=\frac{15\sqrt{39}}{7}$$

$\mathrm{BP}:\mathrm{PE}=\mathrm{AB}:\mathrm{AE}=15:\dfrac{30}{7}=7:2$　より

$$\mathrm{BP}=\frac{7}{9}\mathrm{BE}=\boldsymbol{\frac{5\sqrt{39}}{3}}$$



ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。